Theorie des topographischen Distanzmessers mit Rechenschieber.

Bei topographischen Arbeiten im Massstabe von $^1/_{2500}$ bis $^1/_{5000}$, welche als Vorstudien zu technischen Zwecken, also für Strassenbauten in etwas schwierigem Terrain, Kanalanlagen etc., besonders aber als Vorarbeiten zur Anlage der Eisenbahnen gemacht werden, handelt es sich gewöhnlich zunächst darum, einen Situationsplan mit Höhenkurven im oben angegebenen Massstabe herzustellen. Die Genauigkeit, welche von diesem Situationsplan im Detail verlangt wird, bleibt in Anpassung an den zu erreichenden Zweck stets unter dem für den Kataster verlangten $^1/_{1000}$; wenn nur dieses Detail durch eine vorherige kleine Triangulation in richtiger Weise orientiert und verbunden werden kann, so wird eine Genauigkeit des Details von $^1/_{500}$ in weitaus den meisten Fällen genügen und zwar sowohl für die Horizontal- als auch Vertikaldistanzen.

In diesen Fällen wird es immer mit grossen Vorteilen in Bezug auf Zeitersparnis verbunden sein, das Distanzenmessen in den Kreis der geometrischen Operationen mit hineinzuziehen.

In beinahe noch bedeutenderem Masse tritt die Wichtigkeit des Distanzenmessers bei der Aufnahme topographischer Karten im Massstabe von $^1/_{5000}$ bis $^1/_{25000}$ hervor, indem in diesem Falle die mit demselben zu erreichende Genauigkeit bei der graphischen Auftragung der Messungsresultate wegen der Kleinheit des Massstabes vollständig innerhalb der praktischen Grenzen sich bewegt. Für den Kataster ist die Metode nicht anwendbar, es sei denn zu allgemeinen Verifikationen, zu speziellen ist aber jeweils Theodolit und Latte beizuziehen.

Bei diesen Operationen besteht die Wichtigkeit des Distanzenmessers darin, die Distanzen ohne Zuhülfenahme der üblichen Metode des Vorwärtsabschneidens stets aus **einem** Standpunkte zu bestimmen und dieser Distandbestimmung parallel gehend, zugleich die Höhendifferenzen der aufzunehmenden Objekte mit dem Standpunkte des Instrumentes zu ermitteln.

Eine weitere Anwendung des Distanzenmessers ergiebt sich bei der Aufnahme von generellen Längenprofilen zu Vorstudien, um die direkte Messung der Distanzen und die Abpflockung unnötig zu machen, und zwar auch dann noch, wenn wegen Unebenheit des Terrains eine horizontale Visur auf grössere Distauzen nicht möglich ist; ferner wird dieselbe mit grosser Zeitersparnis bei der Aufnahme von etwas ausgedehnten Querprofilen in nicht coupiertem Terrain zur Verwendung kommen können.

Beschreibung. Der Faden-Distanzmesser besteht, ähnlich wie der Reichenbach'sche, aus zwei horizontalen Parallelfaden in der Ebene des Fadenkreuzes, welche durch zwei Schräubchen und eine Feder in die gewünschte Lage gesetzt und korrigiert werden können.

In Figur 2 stellt **a** den Rahmen vor, auf welchem der Horizontalfaden, **b** die Klötzchen, auf denen der Vertikalfaden des Fadenkreuzes befestigt ist. Zwischen den Rahmenstücken **a** sind in vertikalem Sinne bewegliche Coulissen **c** angebracht, welche zwei weitere Faden in gleichem Abstand vom Horizontalfaden des Fadenkreuzes, die Distanzfaden tragen. Vermittelst der Schräubchen **s**, welche an der Feder **g** den nötigen Widerstand finden, können diese Coulissen bewegt, resp. die Distanzfäden korrigiert und in den gleichen Abstand vom Mittelfaden gebracht werden. Der Zweck dieser Distanzenfäden ist die Herstellung eines **konstanten Sehwinkels.** Nach einfachen geometrischen Sätzen sind nämlich die verschiedenen Abschnitte einer Latte, welche unter einem konstanten Winkel erscheinen, je der Entfernung dieser Latte vom Scheitelpunkte des Winkels proportional, es ist also wenn **a** der Punkt, wo das Auge sich befindet; (Fig. 1.)

$$ab : ac : ad : ae = bf : cg : dh : ei$$

Dem entsprechend wird zum Distanzenmessen ferner eine gut geteilte Latte verwendet, welche für kleinere Distanzen eine gute Nivellierlatte sein kann, aber für grössere Entfernungen, also insbesondere bei Arbeiten im Massstabe von $^1/_{5000}$ bis $^1/_{25000}$ eine kräftigere Teilung erhalten muss.

Durch das Linsensystem des Fernrohrs wird obige einfache Beziehung (auf welche die militärische Stadia basiert ist) etwas komplizierter, indem nämlich die den Lattenabschnitten proportionalen Distanzen je vom **vordern** Brennpunkte des Objektes aus gezählt werden müssen. Die Brennweite des Objektivglases kann einfach erhalten werden, indem man das Fernrohr auf einen sehr entfernten Gegenstand einstellt und das Okular mittelst des Auszuges so verschiebt, dass sowohl Bild als Fadenkreuz deutlich erscheinen. Die Distanz von der Mitte des Objektivglases bis zur Ebene des Fadenkreuzes giebt sodann die gesuchte Brennweite.

Bezeichnen wir die Brennweite der Objektivlinse **A** mit **p**, die Fadendistanz sei **f**, die Entfernung der Objektivlinse bis zur senkrechten Latte **L** sei **a**, berücksichtigen wir ferner, dass nach einem Satze der Optik Lichtstrahlen, welche mit der Axe der Linse parallel gehen, sich nach der Brechung im Brennpunkte derselben schneiden und nehmen als solche Strahlen die durch die beiden Distanzfaden gehenden an, so folgt nach Figur 3 aus der Aehnlichkeit der Dreiecke :

$$\frac{a-p}{L} = \frac{p}{f}$$

Da **p** für jede Linse konstant ist, und auch die Fadendistanz f konstant erhalten werden muss, so ist der Quotient **p/f** konstant, und man kann desshalb setzen:

$$\frac{a-p}{L} = \frac{p}{f} = C$$

woraus

$$a = CL + p$$

als Distanz vom Objektiv bis zur Latte hervorgeht.

Berücksichtigt man nun, dass die Axe des Fernrohres stets angenähert um die halbe Brennweite vom Objektiv absteht, so folgt ohne Weiters die Distanz von der Instrumentaxe bis zur Latte

$$d = a + \frac{p}{2} = CL + \frac{3}{2} p$$

Die Distanz setzt sich also aus 2 Summanden zusammen, wovon der eine dem zwischen den Distanzfaden erscheinenden Latten abschnitte proportional ist und dem Sehen mit blossem Auge entspricht, der andere aber von der Brennweite des Objektivglases abhängt und demnach für verschiedene Instrumente variabel ist.

Man trifft nun gewöhnlich die einfache Anordnung, dem Quotienten **p/f** den Wert 100 zu geben, so dass z. B. einem Lattenabschnitte von **1,23** m eine Entfernung

$$d = 123 \text{ m} + 1{,}5 \text{ p}$$

entspricht. Es erhellt aus dem Angeführten, dass man also zu diesem Distanzenmesser nicht (wie öfters irrtümlich angenommen wird), einer besonders geteilten Latte bedarf, sondern dass jede gut geteilte Nivellierlatte für kleinere Distanzen genügt. Die Grösse der Distanzen, auf welche gearbeitet werden kann, hängt natürlich von der Vergrösserung und Helligkeit des Fernrohrs, sowie von der Kräftigkeit der Lattenteilung ab.

Auf die oben angeführte einfache Weise werden nun die Distanzen unter der Voraussetzung erhalten, dass die Visur horizontal und die Latte vertikal, oder allgemeiner, dass die Visur senkrecht zur Latte sei. Da die Topographie aber Alles auf die Horizontalebene projiciert, so muss die erstere spezielle Voraussetzung gemacht werden. Bei geneigtem Terrain tritt eine geringe Komplikation dieses einfachen Distanzenmessers ein.

Es sei eine Distanz unter dem Elevationswinkel n zu bestimmen (Fig. 4) und setzen wir zunächst voraus, die Latte werde durch den Gehülfen vermittelst Visur über den Schenkel eines an der Latte befestigten rechtwinkligen Dreiecks zur Fernrohraxe senkrecht gestellt, so ist bei einer Ablesung a_1 an der Latte die horizontale Distanz zu derselben mit Vernachlässigung des kleinen Stückes

$$om = \frac{a_1 \sin n}{2}$$

$$d = d_1 \cos n \quad \text{wo} \quad d_1 = Ca_1 + 1{,}5 \text{ p}$$

Bei der Unzuverlässigkeit der Gehülfen und um eine solche Komplikation unnötig zu machen, wird nun stets die Latte absolut vertikal gestellt. Die Ablesung an derselben wird dadurch grösser werden und zwar

$$a = \frac{a_1}{\cos n} \text{ oder } a_1 = a \cos n$$

Setzen wir diesen Wert für a1 ein, so ergiebt sich

$$d_1 = Ca \cos n + 1{,}5 \text{ p}$$

und also

$$d = d_1 \cos^2 n + 1{,}5 \text{ p} \cos n$$

Da die schiefe Distanz $\mathbf{d_1}$ vom vordern Brennpunkte des Objektives aus bis zur Latte bei unseren Instrumenten stets = **100 a** ist, so kann man auch einfach mit Berücksichtigung des Faktors **100** schreiben:

$$d = a\cos^2 n + 1{,}5\ p \cos n$$

Für topographische Aufnahmen in kleinerem Massstab kann der zweite Summand unbedenklich vernachlässigt werden; bei grösseren Massstäben ist es auch unnötig, denselben mit dem Faktor **cos n** zu behaften, so dass die Formel in ihrer möglichsten Einfachheit lautet:

Für Arbeiten in grösserem Massstab (Pläne)

$$\text{Ia.}\quad d = a \cos^2 n + 1{,}5\ p$$

Für kleinern Massstab (topographische Karten)

$$\text{Ib.}\quad d = a \cos^2 n$$

Aus der Verschiedenheit der Formeln, wie sie sich ergeben, wenn der Gehülfe die Latte senkrecht zur Fernrohraxe oder aber absolut senkrecht stellt, geht hervor, wie wichtig für eine gute Distanzenmessung die Stellung der Latte ist, ungeübte Gehülfen sollten desshalb stets durch Senkel oder Dosenlibelle die senkrechte Stellung der Latte kontrollieren können.

Zur Auffindung des Höhenunterschiedes zwischen der Fernrohraxe und dem durch den Mittelfaden gedeckten Teil der Latte hat man einfach:

$$h = d\,\mathrm{tg}\,n$$

Für die Höhendifferenz der Terrainpunkte, wo sich Instrument und Latte befinden, hat man nach Figur 4

$$H = J + h - \frac{a}{2}$$

Eine solche Reduktion wird aber ohne weiteres überflüssig, sofern man nur die Vorsicht gebraucht, den Mittelfaden in derselben Höhe an der Latte einzustellen, welche die Fernrohraxe über dem Höhenfixpunkte des Terrains hat und dann den Höhenwinkel **n** abzulesen.

Der vorige Ausdruck lässt sich umformen, es ist:

$$h = d\,\mathrm{tg}\,n = a\cos^2 n\ \mathrm{tg}\,n = a \cos n \sin n = a\,\frac{\sin 2n}{2}$$

Genauer wäre $(\mathbf{a\cos^2 n + 1{,}5\ p \cos n)\ tg\ n}$; bei nicht zu grossen Höhenwinkeln kann man aber die aus der Distanz **1,5 p cos n** hervorgehende Höhendifferenz unbedenklich vernachlässigen, so dass wir definitiv setzen können:

$$\text{II.}\quad h = a\,\frac{\sin 2n}{2}$$

Die Ausdrücke **I** und **II** können nun auf verschiedene Weise leicht erhalten werden. Nach einer Tafel, welche die gemeinen Logarithmen der Zahlen 1 bis

1000 und die Logarithmen der **sinus** und **cosinus** enthält, ist diese kleine Rechnung leicht und schnell logarithmisch auszuführen. Wäre z. B.:

$$a = 2{,}'48;\; p = 12'';\; n = 5^\circ\, 20'$$

so folgt:

$$d^1 = 248 + 1{,}8 = 249{,}'8$$

$$\log d_1 = 2.3976$$
$$\log \cos^2 n = 9.9962$$
$$d = \text{Numlog } 2.3938 = 247'.6$$

Nach: $\mathbf{h} = \mathbf{d_1 \sin n \cos n}$ berechnet sich die Höhendifferenz:

$$\log d_1 = 2.3976$$
$$\log \sin n = 8.9682$$
$$\log \cos n = 9.9981$$
$$h = \text{Numlog } 1.3639 = 23{,}'12$$

Eine andere einfache Methode ergiebt sich durch folgende kleine Tafel welche die Werte **100 sin^{2}n** und **100 tgn** enthält:

n	100 sin²n	n	100 sin²n	n	100 tgn
0° 0′	0.0	12° 48′	4.9	1°	1.7
1 17	0.1	51	5.0	2	3.5
2 13	0.2	59	5.1	3	5.2
52	0.3	13 7	5.2	4	7.0
3 23	0.4	15	5.3	5	8.7
51	0.5	22	5.4	6	10.5
4 15	0.6	30	5.5	7	12.3
37	0.7	38	5.6	8	14.1
58	0.8	45	5.7	9	15.8
5 17	0.9	52	5.8	10	17.6
36	1.0	14 0	5.9	11	19.4
58	1.1	7	6.0	12	21.3
6 9	1.2	14	6.1	13	23.1
25	1.3	22	6.2	14	24.9
40	1.4	29	6.3	15	26.8
55	1.5	36	6.4	16	28.7
7 9	1.6	43	6.5	17	30.6
23	1.7	50	6.6	18	32.5
36	1.8	57	6.7		
49	1.9	15 4	6.8	2′	0.1
8 2	2.0	10	6.9	4	0.1
14	2.1	17	7.0	6	0.2
26	2.2	24	7.1	8	0.2
38	2.3	31	7.2	10	0.3
49	2.4	37	7.3	12	0.3

		100 $\sin^2 n$			100 $\sin^2 n$		100 tgn
	49	2.4		37	7.3	**12**	0.3
9	0	2.5		44	7.4	**14**	0.4
	11	2.6		51	7.5	**16**	0.5
	22	2.7		57	7.6	**18**	0.5
	33	2.8	**16**	3	7.7	**20**	**0.6**
	43	2.9		10	7.8	**22**	0.6
	53	3.0		16	7.9	**24**	0.7
10	3	3.1		23	8.0	**26**	0.8
	13	3.2		29	8.1	**28**	0.8
	23	3.3		35	8.2	**30**	**0.9**
	33	3.4		41	8.3	**32**	0.9
	42	3.5		48	8.4	**34**	1.0
	52	3.6		54	8.5	**36**	1.0
11	1	3.7	**17**	0	8.6	**38**	1.1
	10	3.8		6	8.7	**40**	**1.2**
	19	3.9		12	8.8	**42**	1.2
	28	4.0		18	8.9	**44**	1.3
	37	4.1		24	9.0	**46**	1.3
	45	4.2		30	9.1	**48**	1.4
	54	4.3		36	9.2	**50**	**1.5**
12	2	4.4		42	9.3	**52**	1.5
	11	4.5		48	9.4	**54**	1.6
	19	4.6		54	9.5	**56**	1.6
	27	4.7	**18**	0	9.6	**58**	1.7
	35	4.8		6	9.7		
	43			12			

Beim Gebrauche dieser Tafel, welche übrigens kaum einer nähern Erläuterung bedarf, ist zu beachten, das nach **Ib**

$$d = a \cos^2 n = (1 - \sin^2 n) = a - a \sin^2 n$$

und **h** = **d tgn** ist.

Nach **Ia** hätte man

$$d = a \cos^2 n + 1{,}5\,p = a\,(1 - \sin^2 n) + 1{,}5\,p = a + 1{,}5\,p - a \sin^2 n$$

Das anderthalbfache der Brennweite kann also auch in diesem Falle leicht berücksichtigt werden, wenn dies für den Zweck der Aufnahme nötig erscheint. Nach den vorigen Angaben

$$a = 2.'48;\ p = 12'';\ n = 5^\circ\,20'$$

hätte man zu berechnen (Tafelwert **0**,**9**)

$$a \sin^2 n = 2{,}48 \times 0{,}9 = 2{,}232$$

woraus $d = 248 + 1{,}8 - 2{,}232 = 247{,}'6$ folgt

und $h = 2{,}476 \times 9{,}3 = 23{,}'03$

Eine fernere Tafel, welche die Höhendifferenzen und Reduktionen der schiefen Distanzen auf den Horizont ohne diese kleine Rechnung angiebt, lassen wir als Beilage folgen.

Die Neigungswinkel gehen bis zu 15°, die Distanzen bis auf 350 (Fuss oder Meter ist natürlich gleichgültig). Die Tabelle giebt für die Ablesungen **a** = **50, 60, 70 ... 350** an der lothrecht gehaltenen Distanzenlatte und den Neigungswinkel

$$n = 0^0\,30',\ 1^0\,0',\ 1^0\,30' \ldots 15^0$$

in der ersten Columne die Werte

$$a \sin^2 n, \text{ somit die Horizontaldistanzen } d = a - a \sin^2 n$$

und je daneben in der zweiten Columne die Höhenunterschiede **h** = **a sin n cos n.** In unserm Beispiele hätte man in der Columne **250** den der Horizontalen **5° 30'** entsprechenden Wert **a sin^{2}n** = **2',** wozu man ungefähr **5"** interpolieren könnte, die Distanz also

$$d = 249{,}8 - 2{,}5 = 247{,}3$$

und direkt daneben **h = 24' minus** dem durch Interpolation zu **0,'7** geschätzten Bruchteile: **h = 23,3**. Die topographischen Arbeiten in kleinerem Massstabe, für welche diese Tafel berechnet ist, werden aber in den häufigsten Fällen die Interpolation unnötig machen, da die Natur der ganzen Metode sich doch nur in den Grenzen einer beschränkten Genauigkeit bewegt, und die angegebenen Zahlen, weil durch direkte Rechnung erhalten, immer auf eine Masseinheit (Fuss oder Meter) genau sind.

Wenn die beiden ersten Beispiele der oben angeführten Ermittlungen der Distanz und des Höhenunterschiedes auch sehr leichte, mit geringem Zeitaufwande verbundene Metoden sind, welche gegenüber dem Vorwärtsabschneiden noch entschiedene Vorteile besitzen, so ist es doch von grossem Nutzen, einerseits auf dem Terrain selbst nicht rechnen zu müssen, anderseits die Zeitdauer dieser Operationen noch zu verkürzen. Die letzte Tafel bietet diese beiden Vorteile, zeigt aber insbesonders bei Anwendung des Metermasses eine für viele Fälle etwas zu geringe Genauigkeit.

Ein von Ingenieur Eschmann konstruierter und von Herrn Prof. Wild verbesserter Rechenstab besitzt nun ebensowohl die Vorzüge der leichten Behandlung und raschen Arbeitens als der erforderlichen Genauigkeit, ergiebt die verlangten Resultate auf mechanische Weise ohne Rechnung sofort mittelst zweier Einstellungen und ist ein sehr kompendiöses Instrument.

Dieser Rechenschieber, Fig. V, besteht aus dem Stabe A, dem Schieber B und der Coulisse C. Der Stab A trägt in einer von der Länge des Stabes abhängigen, übrigens beliebig zu wählenden Einheit die gemeinen Logarithmen der beigeschriebenen Zahlen, so dass die Entfernung

1 bis 2 dem Log. 2
1 bis 3 „ „ 3
1 bis 4 „ „ 4 etc.
. . . .
1 bis 10 „ „ 10 (der Massstabeinheit)

entspricht. (Die Zahl 1 steht am Anfange der Teilung, weil Log. 1 — 0 ist.) Zwischen den Zahlen sind noch weitere Striche interpoliert und zwar lassen sich

zwischen 1 und 2 die Werte	1,02; 1,04; 1,06	. . . . .	1,98
„ 2 „ 5 „ „	1,05; 1,10; 1,15	. . . . .	4,95
„ 5 „ 10 „ „	5,1; 5,2; 5,3	. . . . .	9,9

noch direkt ablesen. Mit wachsendem Numerus rücken die Teilstriche immer näher zusammen, weil die Differenzen ihrer Logarithmen stets kleiner werden. Zwischen den direkt angegebenen Werten liegende werden nach dem Augenmasse interpolirt.

Die zweite Hälfte des Stabes zeigt nur eine genaue Wiederholung der ersten.

Da die Log. der 10, 100, 1000 fachen u. s. w. sich nur durch die Kennziffer unterscheiden, so kann man

1 als 10 ansehen dann ist 2 als 20, 3 als 30 oder
1 „ 100 „ „ „ 2 „ 200, 3 „ 300 etc.

zu betrachten, und die zwischenliegenden Teilstriche haben dann entsprechend höhere Werte.

In Fig. V trägt der linke Teil des Stabes die Bezeichnung **Ch** = + **1**, der rechte **Ch = + 2**, womit die betreffenden Kennziffern oder Charakteristiken angedeutet werden sollen. Es ist nämlich für gewöhnlich ausreichend und in vielen Fällen bequem, der ersten Teilung den Zahlenraum von 10 - 100, der zweiten denjenigen von 100 — 1000 zuzuweisen. Natürlich können den Kennziffern auch die respektiven Werte 0 und 1 oder 2 und 3 je nach Bedürfnis zugewiesen werden, stets aber wird es der Sicherheit im Operieren wegen passend sein, der zweiten Teilung eine um eine Einheit höhere Charakteristik zu geben. Beim Berechnen der Höhendifferenzen tritt der Nutzen dieser Annahme klar in die Augen.

Nach der nämlichen logarithmischen Einheit sind auf dem Schieber B die $\log \cos^2 n$ und zwar da $\cos^2 n$ stets kleiner als 1, die Logarithmen also negativ werden, ihren absoluten Werten nach, von rechts nach links aufgetragen. Die Teilstriche entsprechen den $\log \cos^2 n$ der beigeschriebenen Bogenzahlen und es giebt also der Baum

0—10 den $\log \cos^2 10^\circ$
0—20 „ $\log \cos^2 20^\circ$
. . . .
0—40 „ $\log \cos^2 40^\circ$

Zwischen 0 und 10 entspricht der erste Strich nach 0 dem $\log \cos^2 4^\circ$
2te „ $\log \cos^2 6^\circ$
3te „ $\log \cos^2 8^\circ$

Zwischen 10 und 20 geben die einzelnen Striche die $\log \cos^2$ von je 2 zu 2 Graden und von 20 - 40 von Grad zu Grad an.

Der Gebrauch ergiebt sich nun leicht, es ist nämlich

$$\log d = \log a \cos^2 n = \log a + \log \cos^2 n$$

d. h. der **log d** ergiebt sich aus der algebraischen Summe des **log a** der Stadia-ablesung und des **log cos²n** des Neigungswinkels. Da, wie oben bemerkt, die **log cos²n** negativ, so subtrahiert sich der absolute Wert derselben von **log a**.

Stellt man daher 0 des Schiebers auf den der Stadiaablesung **plus** dem anderthalbfachen der Brennweite entsprechenden Logarithmus am Stabe A ein, so ergiebt sich die auf den Horizont reduzierte Distanz unterhalb dem Neigungs-winkel entsprechenden Teilstriche auf dem Stabe A.

Sei wieder **a** = **2.'48**; **p** = **12"**; **n** = **5°20**, so ist der Stab nach Fig. VI einzustellen, worauf sich schätzungsweise **d** zu **248** ergiebt. Ferner wäre:

Für $n = 6^\circ$ $d = 246'$
„ $n = 8^\circ$ $d = 244'$
„ $n = 10^\circ$ $d = 242'$
„ $n = 20^\circ$ $d = 221'$
„ $n = 30^\circ$ $d = 187{,}'7$
„ $n = 40^\circ$ $d = 146{,}'4$

Wie ersichtlich, ergeben sich bei kleinen Neigungswinkeln die Eesultate nicht mit der Schärfe, welche die beiden ersten der früher angegebenen Metoden gestatten, immer aber noch mit einer für die angeführten Zwecke genügenden Genauigkeit. Um eine grössere Schärfe der Resultate zu erreichen, könnte man den Rechenschieber allerdings so einrichten, dass er die Distanz nach der Formel

$$d = a - a\sin^2 n$$

ergeben würde, der Schieber müsste aber alsdann viel länger gemacht werden, wodurch das Instrument an Handlichkeit einbüssen, und sich der fernere Uebel-stand einer numerischen Operation geltend machen würde.

Die Coulisse C trägt in demselben Massstabe wie der Stab A und der Schieber B die stets **negativen** Logarithmen des Ausdrucks $\frac{\sin 2n}{2}$ und zwar von links nach rechts. Für $n = 45^\circ$ ist $\frac{\sin 2n}{2} = \frac{\sin 90}{2} = \frac{1}{2}$;

$$\log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2;$$

es folgt daraus, dass wenn der Anfangspunkt, der erste Strich mit Sternchen auf 1 des Stabes eingestellt ist, die Zahl 45 der Coulisse mit der Zahl 2 des Stabes coincidieren muss, woraus sich auch die leicht zu beweisende Folgerung ergiebt, das die **log** der **(sin 2n)/2** Reciproken der darüber stehenden Werte sind.

Dem entsprechend trägt der dem ersten Teil des Stabes A zugehörige Teil der Coulisse die **wirkliche** Charakteristik — **1**; der dem zweiten Teil entsprechende **Ch** = — **2**; die Logarithmen der Werte der ersten Hälfte haben deshalb die Form **9, ... - 10**; der zweiten **8, ... - 10.**

Demnach ist die Entfernung vom ersten Strich mit Sternchen bis zur Zahl

$$1 = \log \frac{\sin 2^\circ}{2}$$

$$2 = \log \frac{\sin 4^\circ}{2}$$

$$45 = \log \frac{\sin 90^\circ}{2}$$

Stellt man daher die gemessene Neigung unter die Stadiaablesung auf A ein, so findet sich beim Sternchen links die algebraische Summe von

$$\log a + \log \frac{\sin 2n}{2}$$

oder der darüber interpolierte Strich ist der Numerus von **h** = der Höhe.

Sollte dies Sternchen über den Stab A herausreichen, so kann die Höhe auch an dem in der Mitte oder am rechtseitigen Ende der Coulisse C angebrachten Sternchen abgelesen werden; es ist dann aber die Charakteristik nach dem linkseitigen Sternchen zu ermitteln, was bei der symetrischen Anordnung der Scalen und bei Anwendung der in Fig. V angegebenen Charakteristiken keine Schwierigkeiten bietet. Aus der Anordnung der Charakteristiken folgt, dass das Sternchen in der Mitte das Zehn- und dasjenige rechts das Hundertfache der Ablesung am linken Sternchen ergiebt.

Vom rechtseitigen Sternchen bis zur Zahl 1 bedeuten die Teilstriche Minuten, von der Zahl .1 bis 3 bedeuten die Teilstriche je 2 Minuten

3	„	5	„	„	„	„	5	„
5	„	10	„	„	„	„	10	„
10	„	20	„	„	„	„	20	„
20	„	30	„	„	„	„	30	„
30	„	40	„	„	„	„	1	Grad

von der Zahl 40 „ 45 sind keine Striche mehr angebracht, sondern es muss interpoliert werden.

Da die Coulisse die Neigungen nur bis zu 35 Minuten angiebt, weil sie sonst zu lang würde, so muss für kleinere Neigungen ein Vielfaches genommen und dann die Ablesung im nämlichen Verhältnis verkleinert werden.

Es ist dies erlaubt, da für kleine Winkel angenähert der **Sinus** gleich dem Bogen gesetzt werden kann.

Es ist unter Voraussetzung kleiner Winkel für die Bogenzahlen **x** und **x'**

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = x \sin 1'' \\ \sin x' = x' \sin 1'' \end{array}\right\} \text{woraus}$$

sin x : sin x' = **x : x'** folgt, d. h. die **Sinus** verhalten sich wie die Bogen. Man wird immer am besten thun **x / x' = 10** anzunehmen. Hätte man z. B. **n** = **0° 6'** so stellt man **60'** = **1°** ein, sucht die der Stadiaablesung und letzterem Höhenwinkel entsprechende Höhendifferenz h und nimmt davon den zehnten Teil als wirkliche dem Neigungswinkel **0° 6'** entsprechende Höhendifferenz. Wäre als zweites Beispiel **n = 0° 20'**, so würde die dem Neigungswinkel **200' = 3° 20'** entsprechende Höhendifferenz gesucht und $^{1}/_{10}$ derselben als wirkliche Höhendifferenz genommen.

In den Fällen, wo die Entfernung nicht mittelst der Stadia, sondern durch Intersektion etc. gefunden, also schon auf den Horizont reduziert ist, man demnach nicht **a**, sondern **d** kennt, verfährt man umgekehrt wie oben, indem man nämlich die Neigung auf dem Schieber B auf den **log der auf den Horizont reduzierten Distanz** einstellt. Die Zahl **0** des Schiebers und mit ihr der Schieberzeiger schneiden dann auf dem Stabe A die der Distanz **d** entsprechende Stadia-ablesung **a** ab. Ist diese gefunden, so wird für die Auffindung des Höhenunterschiedes das gleiche Verfahren wie oben angewandt, indem man die Neigung **n** unter den Schieberzeiger bringt und am linkseitigen Sternchen oder wenn dies nicht möglich mit Berücksichtigung der Charakteristikänderung am mittleren oder rechtseitigen Sternchen die Höhendifferenz abliest.

Hätte man $\mathbf{d_1}$ = **249.'6** oder einfacher **a = 2.'48**; **n = 5° 20'**, so ergiebt sich die richtige Einstellung nach Figur VII.

Die dem mittlern Sternchen entsprechende Höhendifferenz ergiebt sich zu **229/10** = **22.'9** die dem linkseitigen entsprechenden direkt **22.'9**; stellt man auf die wirkliche Distanz **249,6** ein, so ergeben sich die etwas genauern respektiven Werte **231/10** und **23.1**, was die Uebereinstimmung mit den früher gerechneten Resultaten zeigt. Hätte man den Neigungswinkel **5°20'/10 = 32'**, so würde die gleiche Einstellung vorzunehmen, die abgesehene Höhendifferenz aber ebenfalls mit **10** zu dividieren sein und also **2,'31** betragen. Dass bis zu dieser Bogenzahl der Sinus dem Bogen proportional gesetzt werden kann, ohne die gewöhnlichen praktischen Grenzen zu überschreiten, geht aus der numerischen Rechnung hervor. Es ist nämlich nach:

$$h = d_1 \sin n \cos n$$

$$\begin{aligned} \log d_1 &= 2{,}3976 \\ \log \sin n &= 7{,}9689 \\ \log \cos n &= \underline{1{,}0000} \\ \text{Num} \log h &= 0{,}3665 \quad h = 2{,}'32 \end{aligned}$$

Die Abweichung von der Wirklichkeit zeigt sich unter der obigen Voraus setzung demnach als sehr gering.

Um bei grössern topographischen Aufnahmen die Korrektion der Höhen, welche durch den doppelten Einfluss der Erdkrümmung und Refraktion notwendig wird, vornehmen zu können, trägt der untere Teil des Stabes eine fernere Teilung, welche diese Korrektion für die auf der obern Seite des Stabes enthaltenen Distanzen angiebt. Die Teilung ist so eingerichtet, dass sowohl Distanz als Korrektion in **Metern** angegeben werden muss. Für eine andere Masseinheit gilt die Teilung nicht.

Um sowohl die Angaben der Teilung auf numerischem Wege prüfen zu können, als auch diese Korrektion in richtigem Sinne zu gebrauchen, mag es notwendig sein, vorerst einige erläuternde Worte über die Refraktion und Erdkrümmung mitzuteilen.

Die optische Axe des Fernrohrs gibt unter der Voraussetzung, dass das Instrument berichtigt, d. h. dass dieselbe u. a. mit der Libellenaxe parallel sei, den **scheinbaren** Horizont an, welcher eine dem Standpunkte des Instruments entsprechende Tangentialebene an die Erdoberfläche bildet. Im Gegensatz zu dem scheinbaren ist der wahre Horizont eine Kugelfläche (hier abgesehen von der elliptoidischen Gestalt der Erde), deren Halbmesser **R** gleich dem Erdhalbmesser ist. Durch die Operation des Nivellierens erhält man also alle Höhen zu gross. Bei geringen Entfernungen ist dieser Unterschied verschwindend klein, bei grössern Distanzen aber soll diese Grösse nicht mehr vernachlässigt werden.

Bezeichnen wir den Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont mit **F'**, die Distanz vom Standpunkte des Instrumentes bis zum Objekte **AD** = **AB** mit **d**, den Erdhalbmesser mit **R**, so ist nach Fig. VIII:

$$CD = (R + F')^2 = R^2 + d^2$$

$$R + F' = R\sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} = R\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{R^2} - \frac{1}{8}\,\frac{d^4}{R^4} + \ldots\right)$$

und demnach:

$$F' = \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{R} - \frac{1}{8}\,\frac{d^4}{R^3}$$

Dass für die Distanz statt des Bogens die Tangente gesetzt wurde, bedingt eine nur verschwindende Differenz, ebenso kann das 2te Glied des Ausdrucks als verschwindend fallen gelassen werden und man hat dann:

$$F' = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{R}$$

Es ist also der Unterschied zwischen dem scheinbaren und wahren Horizont dem Quadrate der Entfernung proportional, dies der Grund, warum diese Grösse bei bedeutenden Distanzen in Rechnung zu ziehen ist.

Massgebend für die Höhenmessungen ist ferner das Auftreten der Strahlenbrechung, die Refraktion. Tritt ein Lichtstrahl in ein dichteres Medium, so wird er eine Brechung erleiden; die durch verschiedene Dichtigkeitszustände der Luft gehenden Lichtstrahlen werden sich deshalb nicht geradlinig, sondern in einer Kurve fortbewegen. Diese Kurve ist im allgemeinen gegen die Erde concav (hohl) und es erscheinen deshalb dem Beobachter alle Objekte zu hoch, weil er dieselben in der an die Kurve gelegten Tangente zu sehen glaubt.

Wenn der dem Bogen **AB** entsprechende Zentriwinkel **c**; der Winkel **DAE** = **c'**, dem der Eefraktion entsprechende ist, so folgt:

$$AD = AB = Rc$$

$$\text{und } ED = r = ADc'$$

Setzen wir nun $c' = ac$, wo a den Refraktionsfaktor bezeichne, so folgt

$$DE = ADac = aRc^2$$

$$\text{und } c = \frac{AD}{R} \text{ eingeführt folgt}$$

$$r = DE = a\,\frac{AD^2}{R} = a\,\frac{d^2}{R}$$

es wächst der Wert für die Refraktion also wieder mit dem Quadrate der Entfernung. Nach Gauss beträgt der mittlere Wert für die Refraktion ***a* = 0,0653.** Die Korrektion der Höhen in Bezug auf Refraktion und Reduktion auf den wahren Horizont beträgt demnach

$$F' - r = F = \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{R} - 0{,}0653\,\frac{d^2}{R} = 0{,}4347\,\frac{d^2}{R}$$

Setzt man den Wert des Erdhalbmessers in Metern ein, so ergiebt sich für Meter:

$$F = 0{,}\ 000\ 000\ 0659\ d^2$$

um welche Grösse die nivellitisch erhaltenen Höhen zu **verkleinern**, die trigonometrisch bestimmten mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Eleyation zu **vergrössern** sind.

Die untere Seite des Stabes enthält nun die Werte dieser Korrektion für die auf der obern Seite angegebenen Distanzen direkt, nicht die Logarithmen dieser Werte. Damit nun auch Anfänger diese Korrektionen in richtiger Weise zu gebrauchen wissen, denselben immer den richtigen Wert geben, um Nachrechnungen überflüssig zu machen und zugleich die Richtigkeit der Teilung darzuthun, folgen hier einige Werte für **F:**

Es ist nach:

Formel gerechnet: d	F	Stab: F
m	m	m
500	0.02	0.017
1000	0.07	0.068
1500	0.15	0.16
2000	0.26	0.26
4000	1.06	1.07
5000	1.65	1.68

Aus der Zahlenreihe geht hervor, dass dem Zehnfachen der Distanz das Hundertfache der Korrektion entspricht.

Um diese Werte genau einstellen zu können, ist am untern Schenkel des Schiebers ein Strich mit Sternchen eingraviert, welcher mit der Zunge des Schiebers und dem Nullpunkte der **$\cos^2 n$** Teilung in gleicher Richtung steht. Will man deshalb die Korrektion für eine beliebige Distanz bestimmen, so stellt man den Zeiger des Schiebers auf den Logarithmus derselben ein und liest unten am Sternchen den Wert der Korrektion direkt ab.

Fig. II. Corrigirbarer Fadendistanzmesser.

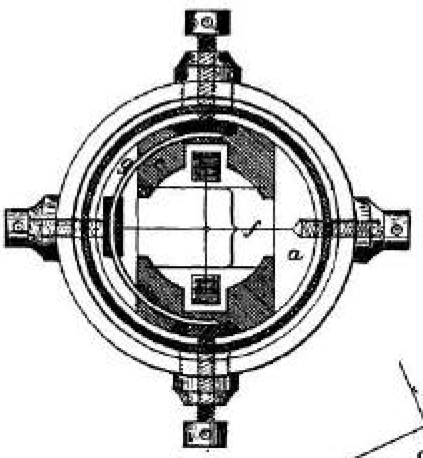


Fig. III.

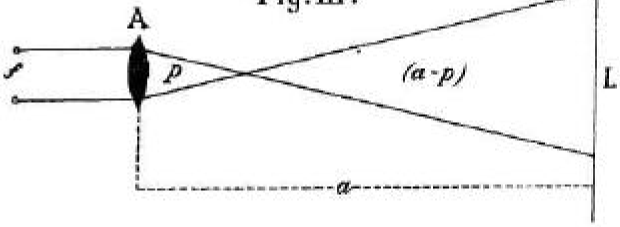
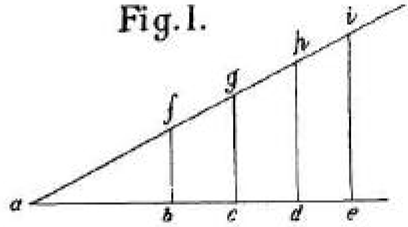


Fig. I.



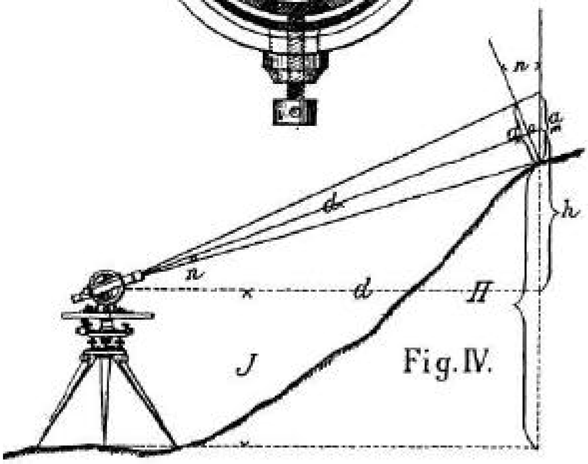


Fig. IV.

Fig. V. Rechenschieber.

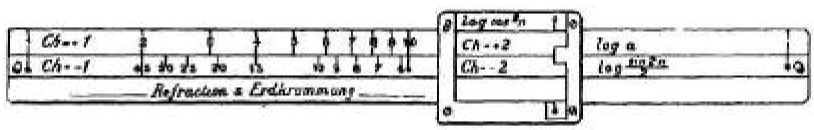
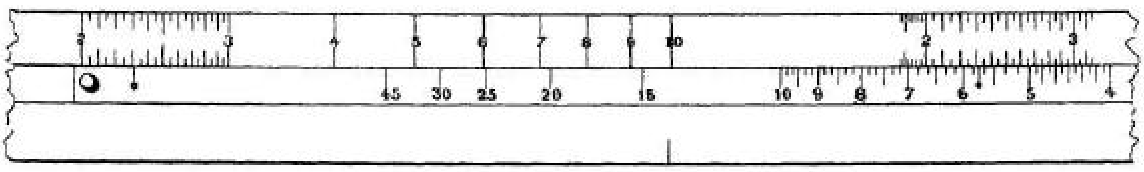


Fig. VII. $h = a\,\frac{\sin 2n}{2}$



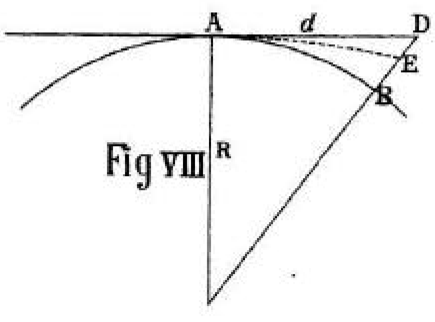
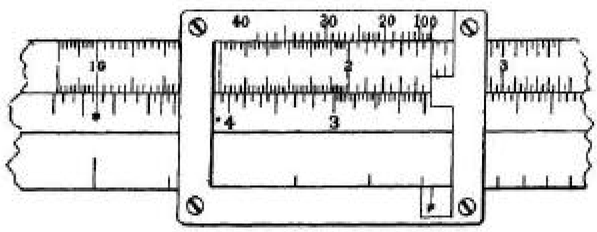


Fig VIII

Fig. VI. $d = a \cos^2 n$



Reduktions- und Höhen-Tabelle für topographische Aufnahmen.

	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350
0°,30'	—	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
1. 0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6
30	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9
2. 0	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12
30	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	1 12	1 12	1 13	1 13	1 14	1 14	1 14	1 15	1 15
3. 0	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	1 10	1 10	1 11	1 11	1 12	1 13	1 13	1 13	1 14	1 15	1 15	1 16	1 16	1 17	1 17	1 18	1 18
30	3	4	4	5	5	6	7	7	8	1 9	1 9	1 10	1 10	1 11	1 12	1 12	1 13	1 13	1 14	1 15	1 15	1 16	1 16	1 17	1 18	1 18	1 19	1 20	1 20	1 21	1 21
4. 0	3	4	5	6	6	7	1 8	1 8	1 9	1 10	1 10	1 11	1 12	1 13	1 13	1 14	1 15	1 15	1 16	1 17	1 17	1 18	1 19	1 19	1 20	1 21	2 22	2 22	2 23	2 24	2 24
30	4	5	5	6	1 7	1 8	1 9	1 9	1 10	1 11	1 12	1 13	1 13	1 14	1 15	1 16	1 16	1 17	1 18	1 19	2 20	2 20	2 21	2 22	2 23	2 23	2 24	2 25	2 26	2 27	2 27
5. 0	4	5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 10	1 11	1 12	1 13	1 14	1 15	1 16	1 16	2 17	2 18	2 19	2 20	2 21	2 22	2 23	2 23	2 24	2 25	2 26	2 27	2 28	3 29	3 30	3 30
30	5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 10	1 11	1 12	1 13	1 14	1 15	2 16	2 17	2 18	2 19	2 20	2 21	2 22	2 23	2 24	2 25	2 26	3 27	3 28	3 29	3 30	3 31	3 31	3 32	3 33
6. 0	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11	1 12	1 14	2 14	2 16	2 17	2 18	2 19	2 20	2 21	2 22	2 23	3 24	3 25	3 26	3 27	3 28	3 29	3 30	3 31	3 32	3 33	4 34	4 35	4 36
30	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11	1 12	2 13	2 15	2 16	2 17	2 18	2 19	2 20	2 21	3 22	3 24	3 25	3 26	3 27	3 28	3 29	3 30	4 31	4 33	4 34	4 35	4 36	4 37	4 38	4 39
7. 0	1 6	1 7	1 8	1 10	1 11	2 12	2 13	2 14	2 16	2 17	2 18	3 19	3 21	3 22	3 23	3 24	3 25	3 27	3 28	4 29	4 30	4 31	4 33	4 34	4 35	4 36	5 37	5 39	5 40	5 41	5 42
30	1 6	1 8	1 9	1 10	2 12	2 13	2 14	2 16	2 17	2 18	3 19	3 21	3 22	3 23	3 25	3 26	4 27	4 28	4 30	4 31	4 32	4 34	5 35	5 36	5 38	5 39	5 40	5 41	6 43	6 44	6 45
8. 0	1 7	1 8	1 10	2 11	2 12	2 14	2 15	2 17	3 18	3 19	3 21	3 22	3 23	3 25	4 26	4 28	4 29	4 30	4 32	5 33	5 34	5 36	5 37	5 39	6 40	6 41	6 43	6 44	6 45	7 47	7 48
30	1 7	1 9	2 10	2 12	2 13	2 15	2 16	3 18	3 19	3 20	3 22	3 23	4 25	4 26	4 28	4 29	5 31	5 32	5 34	5 35	5 37	6 38	6 39	6 41	6 42	7 44	7 45	7 47	7 48	7 50	8 51
9. 0	1 8	1 9	2 11	2 12	2 14	2 15	3 17	3 19	3 20	3 22	4 23	4 25	4 26	4 28	5 29	5 30	5 32	5 34	6 36	6 37	6 39	6 40	7 42	7 43	7 45	7 46	8 48	8 49	8 51	8 53	9 54
30	1 8	2 10	2 11	2 13	2 15	3 16	3 18	3 20	4 21	4 23	4 24	4 26	5 28	5 29	5 31	5 32	6 34	6 36	6 37	7 39	7 41	7 42	7 44	8 46	8 47	8 49	8 50	9 52	9 54	9 55	9 57
10. 0	2 9	2 10	2 12	2 14	3 15	3 17	3 19	4 20	4 22	4 24	5 26	5 27	5 29	5 31	6 32	6 34	6 36	7 38	7 39	7 41	8 43	8 44	8 46	8 48	9 50	9 51	9 53	10 55	10 56	10 58	11 60
30	2 9	2 11	2 13	3 14	3 16	3 18	4 20	4 22	4 23	5 25	5 27	5 29	6 30	6 32	6 34	7 36	7 38	7 39	8 41	8 43	8 45	9 47	9 48	9 50	10 52	10 54	10 56	11 57	11 59	11 61	12 63
11. 0	2 9	2 11	3 13	3 15	3 17	4 19	4 21	4 22	5 24	5 26	5 28	6 30	6 32	7 34	7 36	7 37	8 39	8 41	8 43	9 45	9 47	9 49	10 51	10 52	11 54	11 56	11 58	12 60	12 62	12 64	13 66
30	2 10	2 12	3 14	3 16	4 18	4 20	4 21	5 23	5 25	6 27	6 29	6 31	7 33	7 35	8 37	8 39	8 41	9 43	9 45	10 47	10 49	10 51	11 53	11 55	12 57	12 59	12 61	13 63	13 64	14 66	14 68
12. 0	2 10	3 12	3 14	3 16	4 18	4 20	5 22	5 24	6 26	6 28	6 30	7 33	7 35	8 37	8 39	9 41	9 43	10 45	10 47	10 49	11 51	11 53	12 55	12 57	13 59	13 61	13 63	14 65	14 67	15 69	15 71
30	2 11	3 13	3 15	4 17	4 19	5 21	5 23	6 25	6 27	7 30	7 32	7 34	8 36	8 38	9 40	9 42	10 44	10 46	11 49	11 51	12 53	12 55	13 57	13 59	14 61	14 63	15 66	15 68	15 70	16 72	16 74
13. 0	3 11	3 13	4 15	4 18	5 20	5 22	6 24	6 26	7 28	7 31	8 33	8 35	9 37	9 39	10 42	10 44	10 46	11 48	11 50	12 53	13 55	13 57	14 59	14 61	15 64	15 66	16 68	16 70	17 72	17 75	18 77
30	3 11	3 14	4 16	4 18	5 20	5 23	6 25	7 27	7 30	8 32	8 34	9 36	9 39	10 41	10 43	11 45	11 48	12 50	12 52	13 54	14 57	14 59	15 61	15 64	16 66	16 68	17 70	17 73	18 75	19 77	19 79
14. 0	3 12	4 14	4 16	5 19	5 21	6 23	6 26	7 28	8 31	8 33	9 35	9 38	10 40	11 42	11 45	12 47	12 49	13 52	13 54	14 56	15 59	15 61	16 63	16 66	17 68	18 70	18 73	19 75	19 77	20 80	20 82
30	3 12	4 15	4 17	5 19	6 22	6 24	7 27	8 29	8 32	9 34	9 36	10 39	11 41	11 44	12 46	12 48	13 51	13 53	14 56	15 58	16 61	16 63	17 65	18 68	18 70	19 73	19 75	20 78	21 80	21 82	22 85
15. 0	3 13	4 15	5 18	5 20	6 22	7 25	7 27	8 30	9 33	9 35	10 37	11 40	11 42	12 45	13 48	13 50	14 52	15 55	15 58	16 60	17 63	17 65	18 67	19 70	19 73	20 75	20 77	21 80	22 82	23 85	23 88

Die Tabelle giebt für die Ablesungen $a = 50, 60, 70$ ..... an der lotrecht gehaltenen Distanzenlatte und die Neigungswinkel $n = 0°30, 1°0', 1°30'$ ..... zuerst; $a \cdot \sin^2 n$, somit die Horizontaldistanzen $d = a - a \cdot \sin^2 n$ und je daneben die Höhenunterschiede $h = a \cdot \sin n \cdot \cos n$.

Berechnet Prof. WILD.